NOUVELLE MÉTHODE
DE
DÉTERMINER LES DÉRANGEMENS
DANS
LE MOUVEMENT DES CORPS CÉLESTES, CAUSÉS
PAR LEUR ACTION MUTUELLE. (*)

PAR Mr. L. EULER.

Toute la Théorie de l'Aſtronomie ſe réduit aujourd'hui à la détermination du mouvement d'un corps, qui eſt pouſſé par des forces quelconques, qu'on peut regarder comme connues. En effet, toutes les recherches qu'on a faites juſqu'ici dans l'Aſtronomie, prouvent inconteſtablement que tous les corps céleſtes s'attirent mutuellement en raiſon de leurs maſſes & du quarré renverſé de leurs diſtances, quoiqu'il y ait des cas où cette derniere proportion ſouffre quelque changement, lorſque le corps attirant n'eſt pas ſphérique, & la diſtance en même tems peu conſidérable, comme il arrive à l'égard des Satellites de Jupiter, ſur leſquels la force de cette planete s'écarte aſſez ſenſiblement de ladite proportion, à cauſe de ſon applatiſſement.

(*) Lû le 8 Juillet 1762.

Mais, dès que la diſtance des corps eſt plus conſidérable, cette irrégularité évanouit entierement, & l'attraction devient la même que ſi les corps étoient parfaitement ſphériques. Cependant, quand même on ſeroit obligé de tenir compte de cette aberration, & que les forces ne ſuivroient pas exactement la raiſon renverſée du quarré des diſtances, la méthode demeure la même, pourvu que cette aberration ſoit connue, & on aura toujours à réſoudre le probleme ſuivant :

Toutes les forces dont un corps céleſte eſt pouſſé, étant connues, déterminer ſon mouvement en ſorte qu'on ſoit en état d'aſſigner pour tout tems la vraie place qu'il occupe dans le Ciel.

C'eſt ſur ce probleme fondamental de toute l'Aſtronomie, que je vai faire les réflexions ſuivantes.

I. Le mouvement d'un corps céleſte eſt cenſé régulier, lorſqu'il n'eſt attiré que vers un ſeul corps en repos, dont la force ſuit exactement la raiſon inverſe du quarré des diſtances; ou bien, en cas que le corps attirant ait lui-même quelque mouvement, étant pouſſé par des forces quelconques, lorſque le corps attiré eſt outre cela pouſſé par les mêmes forces. C'eſt dans ces cas que le corps attiré décrit, autour de celui qui l'attire, une ſection conique conformément aux regles découvertes par Kepler: lequel mouvement étant fort aiſé à déterminer, on peut bien le regarder comme parfaitement connu, & les autres mouvemens ne ſont eſtimés irréguliers, qu'entant qu'ils s'écartent des regles Képlériennes. Ainſi le mouvement des planetes principales ſeroit régulier, ſi elles n'étoient pouſſées par d'autres forces, que celles qui les tire vers le centre du Soleil: & le mouvement de la Lune autour de la Terre ſeroit auſſi régulier, ſi, outre la force attractive de la Terre, elle éprouvoit préciſément les mêmes forces accélératrices qui agiſſent ſur la Terre, quelqu'irrégulier que fût d'ailleurs le mouvement de celle-ci.

II. Mais il n'eſt que trop certain qu'un tel mouvement régulier ne ſe trouve pas dans tout le Ciel. Car, quelqu'exactement que la

Terre

Terre & les autres planetes principales, à l'exception de Saturne & de Jupiter, ſemblent obſerver les regles de Kepler, le ſeul mouvement progreſſif de leurs abſides, dont aucun Aſtronome ne diſconvient plus, renferme une aberration très réelle de ces regles, quand même on voudroit encore douter de pluſieurs petites inégalités qu'on vient de découvrir dans leur mouvement même. Et puiſque les lignes des nœuds, dont les orbites des planetes ſe coupent mutuellement, ne ſe trouvent pas non plus en repos, c'eſt une preuve certaine que toutes les planetes ſont aſſujetties encore à d'autres forces que celle qui les pouſſe vers le Soleil. Tout cela prouve inconteſtablement l'action mutuelle que tous les corps céleſtes exercent les uns ſur les autres.

III. Il arrive bien, heureuſement, que ces dérangemens qu'on obſerve dans le mouvement des corps céleſtes, ſont pour la plûpart fort petits, ce qui nous met en état de les déterminer aſſez exactement par voie d'approximation, mais il s'en faut beaucoup que nous puiſſions nous vanter d'une connoiſſance parfaite de leurs mouvemens, étant obligés de négliger même une infinité de petites inégalités, leſquelles, quand même elles ſeroient pour la plûpart inſenſibles, prouvent ſuffiſamment combien peu nous ſommes encore avancés dans ces recherches. Après les ſoins de feu Mr. *Tobie Meyer*, dont la mort prématurée nous prive des plus importantes découvertes, on peut regarder le mouvement de la Lune comme preſqu'auſſi bien connu que celui de la Terre, l'erreur de ſes Tables ne montant jamais à une minute. Mais, ſi l'on exigeoit un plus haut degré de préciſion, & qu'on prétendît ſavoir le lieu de la Lune à une ſeconde près, il faudroit avouer que la méthode dont on s'eſt ſervi eſt inſuffiſante, & qu'elle ne ſauroit être portée à ce degré de préciſion.

IV. Il en eſt de même des dérangemens que les planetes ſe cauſent mutuellement par leurs forces attractives; à moins que l'effet ne ſoit très petit, la méthode qu'on emploie pour le déterminer, eſt aſſujettie à de très grands inconvéniens. Une des principales raiſons en eſt qu'on eſt obligé d'exprimer les dérangemens par des ſéries, dont

les termes ne renferment que les ſinus ou coſinus de certains angles, de la même maniere qu'on repréſente les irrégularités dans le mouvement de la Lune: or, quand il s'agit de celles dont Jupiter & Saturne ſe troublent l'un l'autre, leur diſtance eſt trop différente dans leur conjonction & oppoſition, pour qu'on puiſſe exprimer l'effet de leurs forces par une telle ſérie convergente. De quelque maniere qu'on s'y prenne, on ne ſauroit jamais être ſûr que les termes qu'on eſt forcé de négliger, ne donnent un réſultat encore aſſez conſidérable. La grande inégalité que Mr. *de la Lande* vient de découvrir dans le mouvement de Saturne, & qui monte juſques à 14 minutes, provient ſans doute de ces termes qu'on a négligés dans le calcul, dont le nombre étant infini, on doit être d'autant moins ſurpris que la ſérie elle-même ſoit très peu convergente.

V. Dans ces recherches ſur la Lune & les planetes, on a tâché de déterminer les inégalités par des intégrations actuelles, en exprimant par des ſéries infinies les intégrales des équations différentio-différentielles, qui renferment toutes les déterminations du mouvement; ce qui ne peut ſe pratiquer que par des approximations très ennuyeuſes, & qui ne laiſſent que trop de doutes ſur la certitude. Mais, lorſqu'il s'agit des dérangemens que cauſe la force attractive d'une comete dans le mouvement d'une planete, ou réciproquement la force de celle-ci dans le mouvement d'une comete, tous ces ſecours deviennent entierement inutiles, & les ſéries auxquelles on ſeroit réduit en ſuivant la même méthode, perdroient leur convergence à un tel point qu'on n'en ſauroit plus rien conclure. Par cette raiſon, quand Mr. *Clairaut* entreprit de déterminer la retardation de la fameuſe Comete de 1682, qui ne fut de retour que l'an 1759, il a été obligé de ſuivre une route tout à fait différente, & de s'en tenir immédiatement aux équations différentio-différentielles, d'où ayant déduit par un travail incroyable tous les changemens quaſi momentanés, il en a conclu enfin l'effet tout entier que la force de Jupiter a du produire ſur cette comete. Il en ſeroit de même, ſi l'on vouloit déterminer l'effet qu'une

ne comete produit ſur le mouvement de la Terre ou de quelqu'autre planete, dont elle s'approcheroit aſſez pour y cauſer un changement ſenſible.

VI. Après tant de recherches de cette nature, on peut preſque prononcer, que tous les ſoins qu'on ſe donneroit pour découvrir les intégrales des équations primitives, qui ſont toujours différentielles du ſecond degré, ſeront perdus, & qu'on n'en ſauroit attendre aucun ſecours. Pour ces raiſons, je me propoſe ici d'examiner quel parti on peut tirer immédiatement des équations différentio-différentielles que les principes de la Mécanique nous fourniſſent; & de quelle maniere on peut par-là parvenir à une connoiſſance plus ou moins complette du mouvement que nous cherchons, ſans nous engager dans les intégrations qui ſemblent ſurpaſſer notre portée. Dans cette vue, je vai commencer par les formules différentio-différentielles auxquelles les principes du mouvement nous conduiſent immédiatement, & enſuite j'examinerai comment on les peut transformer, pour les rendre plus propres à l'uſage aſtronomique. En voici le probleme.

PROBLEME I.

Les forces dont un corps céleſte eſt pouſſé, étant données, trouver les formules différentio-différentielles qui renferment les changemens cauſés dans ſon mouvement.

SOLUTION.

Qu'on rapporte le lieu préſent du corps, auſſi bien que ſon mouvement, à un plan fixe pris à volonté, & qui ſoit le même que celui de la Planche. Sur ce plan on établit auſſi une direction fixe OI tirée d'un point auſſi fixe O. Que le corps en queſtion ſe trouve maintenant dans un lieu quelconque Z, d'où l'on tire ſur le plan la perpendiculaire ZY, & du point Y ſur la direction fixe OI la perpendiculaire YX: de ſorte que le lieu du corps ſoit déterminé par les trois coordonnées que je nomme: Planche VII. Fig. 1.

$$OX = x; \quad XY = y \quad \& \quad XZ = z.$$

Maintenant, de quelques forces que le corps ſoit pouſſé, on les peut toujours décompoſer en ſorte qu'il en réſulte trois forces qui agiſſent ſelon les mêmes directions ZP, ZQ & ZR. Soient donc ces trois forces

ſelon $ZP = P$; ſelon $ZQ = Q$ & ſelon $ZR = R$.

Cela poſé, prenant l'élément du tems dt conſtant, les principes du mouvement nous fourniſſent ces trois égalités:

$$\alpha ddx = P dt^2; \quad \alpha ddy = Q dt^2; \quad \alpha ddz = R dt^2$$

où α eſt une quantité conſtante qu'il faut déterminer par la maniere dont on exprime les forces rélativement au tems. Ainſi, exprimant la force de chaque corps céleſte par ſa maſſe diviſée par le quarré de ſa diſtance, & au lieu du tems introduiſant le mouvement moyen du Soleil, dont l'élément ſoit $= d\tau$; ſi nous poſons la maſſe du Soleil $= S$ & ſa diſtance moyenne à la Terre $= e$, on aura $\alpha = \frac{S}{e^3}$ en écrivant $d\tau$ au lieu de dt: en ſorte que τ exprime l'angle décrit par le Soleil autour de la Terre dans le tems t, ſelon le mouvement moyen.

Remarque I. Je ſuppoſe ici le point O avec le plan OXY en repos; mais ordinairement on prend le point O dans le centre d'un corps céleſte, auquel on rapporte le mouvement du corps en queſtion Z. Dans ce cas, à moins que ce corps en O ne ſoit effectivement en repos, comme ſi l'on y mettoit le Soleil, il faut auſſi tenir compte du mouvement de ce corps, ou plutôt des forces qui le produiſent. Alors il ne s'agit que de faire un léger changement dans nos formules: on n'a qu'à décompoſer les forces qui agiſſent ſur le corps O ſelon les mêmes trois directions, & les appliquer en ſens contraire encore au corps Z, outre celles qui y agiſſent actuellement. Après ce changement, nos formules exprimeront le mouvement reſpectif du corps Z, par rapport au corps O, ou tel qu'il paroit à un Spectateur placé dans le centre du corps O. Or alors, le point O n'étant plus en repos, il faut toujours tirer les trois coordonnées en ſorte qu'elles demeurent paral-

paralleles à trois directions fixes, ou dirigées toujours vers les mêmes points du Ciel. Ainſi nos formules s'appliquent également, tant au mouvement abſolu du corps Z, qu'à ſon mouvement reſpectif à l'égard d'un autre corps quelconque, pourvu qu'on comprenne auſſi dans les lettres P, Q & R les forces accélératrices qui agiſſent ſur le corps O, mais dans un ſens contraire.

Remarque II. Soit qu'on ſe ſerve immédiatement de ces formules, ſoit qu'on les transforme en d'autres formes quelconques, on n'en ſauroit tirer aucun fruit à moins que pour un certain tems donné on ne connoiſſe, tant le lieu du corps Z, que le mouvement qu'il a dans cet inſtant. Dans ce moment donc, les trois coordonnées x, y & z ſeront connues, qui déterminent le lieu du corps Z: or, à cauſe du mouvement qui eſt auſſi connu, on tirera les viteſſes ſelon les trois directions fixes, ou, ce qui revient au même, les trois valeurs $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ ſeront connues. Maintenant, ces élémens étant donnés, on demande une ſolution par laquelle l'on puiſſe déterminer pour tout autre tems, tant le lieu que le mouvement du même corps. L'intégration de nos formules nous procureroit ſans doute cet avantage; mais, comme nous ſommes obligés d'y renoncer en général, nous devons borner nos recherches à un tems peu conſidérable, écoulé depuis l'époque marquée, où le lieu avec le mouvement du corps eſt connu: & partant je m'appliquerai à la ſolution du probleme ſuivant.

PROBLEME II.

Le lieu & le mouvement du corps étant connus pour une époque donnée, avec les forces qui agiſſent ſur le corps, déterminer pour un tems peu conſidérable écoulé depuis cette époque, tant le lieu que le mouvement du corps.

SOLUTION.

Que le tems t réponde à l'époque propoſée, où les trois coordonnées x, y & z déterminent le lieu du corps, & ſont par conſéquent données; à cauſe de ſon mouvement pareillement donné, les quantités ſuivantes ſeront auſſi connues

$$\frac{dx}{dt} = p, \qquad \frac{dy}{dt} = q \qquad \& \ \frac{dz}{dt} = r.$$

Ces valeurs étant introduites dans nos formules à cauſe de $ddx = dp\,dt$, $ddy = dq\,dt$ & $ddz = dr\,dt$, nous fourniſſent

$$\alpha\,dp = P\,dt, \quad \alpha\,dq = Q\,dt \quad \& \ \alpha\,dr = R\,dt.$$

Maintenant, ſi l'on demandoit l'état du corps après un tems infiniment petit dt, depuis l'époque établie, nous aurions pour ſon lieu les coordonnées

$$x + dx = x + p\,dt, \ y + dy = y + q\,dt, \ z + dz = z + r\,dt,$$

& pour ſon mouvement les quantités

$$p + dp = p + \frac{1}{\alpha} P\,dt, \ q + dq = q + \frac{1}{\alpha} Q\,dt, \ r + dr = r + \frac{1}{\alpha} R\,dt,$$

& ces formules pourront avoir lieu quand on prend pour dt un tems fini, mais extrêmement petit, en ſorte que, plus on le ſuppoſera petit, & moins on s'écartera de la vérité. Mais marquons le tems écoulé après l'époque par τ, & ſoient alors les trois coordonnées x', y', z', & les trois quantités pour la détermination du mouvement p', q', r', dont il s'agit de définir les valeurs. Or ces quantités pouvant être regardées comme des fonctions du tems $t + \tau$, pendant que les primitives ſont de ſemblables fonctions du tems t, nous aurons par les principes de l'analyſe:

$$x' = x + \frac{\tau\,dx}{dt} + \frac{\tau^2\,ddx}{2\,dt^2} + \frac{\tau^3 d^3x}{6\,dt^3} + \frac{\tau^4 d^4x}{24\,dt^4} + \text{etc.}$$

& ainſi des autres. Or, puiſque $\frac{dx}{dt} = p$ & $\frac{dp}{dt} = \frac{1}{\alpha} P = \frac{ddx}{dt^2}$

d'où

d'où nous tirons outre cela:

$$\frac{d^3x}{dt^3} = \frac{dP}{\alpha dt}; \quad \frac{d^4x}{dt^4} = \frac{ddP}{\alpha dt^2} \quad \text{etc.}$$

& partant les trois coordonnées cherchées ſeront:

$$x' = x + \tau p + \frac{\tau\tau P}{2\alpha} + \frac{\tau^3 dP}{6\alpha dt} + \frac{\tau^4 ddP}{24\alpha dt^2} + \frac{\tau^5 d^3P}{120\alpha dt^3} + \text{etc.}$$

$$y' = y + \tau q + \frac{\tau\tau Q}{2\alpha} + \frac{\tau^3 dQ}{6\alpha dt} + \frac{\tau^4 ddQ}{24\alpha dt^2} + \frac{\tau^5 d^3Q}{120\alpha dt^3} + \text{etc.}$$

$$z' = z + \tau r + \frac{\tau\tau R}{2\alpha} + \frac{\tau^3 dR}{6\alpha dt} + \frac{\tau^4 ddR}{24\alpha dt^2} + \frac{\tau^5 d^3R}{120\alpha dt^3} + \text{etc.}$$

& par le même fondement nous aurons pour le mouvement du corps

$$p' = p + \frac{\tau P}{\alpha} + \frac{\tau^2 dP}{2\alpha dt} + \frac{\tau^3 ddP}{6\alpha dt^2} + \frac{\tau^4 d^3P}{24\alpha dt^3} + \text{etc.}$$

$$q' = q + \frac{\tau Q}{\alpha} + \frac{\tau^2 dQ}{2\alpha dt} + \frac{\tau^3 ddQ}{6\alpha dt^2} + \frac{\tau^4 d^3Q}{24\alpha dt^2} + \text{etc.}$$

$$r' = r + \frac{\tau R}{\alpha} + \frac{\tau^2 dR}{2\alpha dt} + \frac{\tau^3 ddR}{6\alpha dt^2} + \frac{\tau^4 d^3R}{24\alpha dt^3} + \text{etc.}$$

où je n'ai qu'à remarquer que les forces P, Q, R étant données, puiſqu'elles dépendent en partie des coordonnées x, y, z, & en partie du lieu & du mouvement des corps dont elles réſultent, leurs valeurs différentielles $\frac{dP}{dt}$, $\frac{ddP}{dt^2}$ etc. ſeront auſſi exprimées par des quantités finies & connues; de ſorte que ces ſéries infinies expriment exactement les quantités que nous cherchions.

Remarque I. Si l'intervalle de tems τ eſt infiniment petit, ces formules nous fourniſſent les mêmes valeurs que la différentiation; mais, pour peu que cet intervalle τ ſoit conſidérable, on ſentira aiſément combien les déterminations différentielles s'écartent de la vérité.

Remarque II. Plus cet intervalle de tems τ eſt pris grand, & moins les ſéries trouvées ſeront convergentes; on ſera donc obligé d'en prendre d'autant plus de termes depuis le commencement, pour arriver au même point de préciſion. Cependant, quelque nombre de termes qu'on en veuille prendre, il ne ſera jamais convenable de donner à τ une trop grande valeur, de peur que les termes négligés ne deviennent trop conſidérables. Car, quoique les termes ſuivans ſoient diviſés par de plus grands nombres, il arrive ordinairement que les valeurs fournies par la différentiation réitérée $\frac{dP}{dt}$, $\frac{ddP}{dt^2}$, $\frac{d^3P}{dt^3}$ etc. vont auſſi en augmentant, de ſorte que pour la plûpart la convergence dépend plutôt de la petiteſſe de l'intervalle τ, que de la grandeur des dénominateurs.

Remarque III. Or, ayant trouvé par cette méthode l'état du corps pour le tems $t + \tau$; ou bien les quantités x', y', z', p', q', r', en les ſubſtituant au lieu des primitives x, y, z, p, q, r, on paſſera de la même maniere encore plus loin, & on déterminera l'état du corps pour le tems $t + 2\tau$. Mais alors il faut que les forces P, Q, R, ſoient auſſi connues pour le tems $t + \tau$, ce qu'on peut bien ſuppoſer; quand le mouvement des autres corps qui agiſſent ſur le corps Z eſt connu. Mais, en cas que leur mouvement fût auſſi troublé, on ſeroit obligé de chercher par la même méthode l'état de chacun pour le tems $t + \tau$, avant que de paſſer à un nouvel intervalle de tems τ. Par ce moyen, en réitérant pluſieurs fois les mêmes opérations, on parviendra enfin à la connoiſſance du mouvement pour un tems auſſi éloigné de la premiere époque qu'on voudra, & cela ſans le ſecours d'aucune intégration.

Remarque IV. Plus on prendra les intervalles de tems τ petits pour parvenir à ce but, & plus de fois on ſera obligé de répéter les mêmes opérations. Ainſi, pour le tems $t + T$, en prenant $\tau = \frac{T}{n}$, il faudra répéter ces opérations n fois. De là naît cette queſtion

aſſez

aſſez importante : puiſque dans chaque opération on admet une petite erreur, qui étant réitérée devient enfin conſidérable, s'il vaut mieux donner à τ des valeurs plus petites ou plus grandes, attendu que dans le premier cas les erreurs, quoique plus petites, ſont multipliées par un plus grand nombre que dans l'autre? Pour décider cette queſtion, ſuppoſons qu'on prenne de nos ſéries les trois premiers termes, de ſorte que l'erreur commiſe puiſſe être eſtimée par le quatrieme terme, & partant $= \lambda\tau^3$. Soit maintenant le tems entier $T = n\tau$, de ſorte que les opérations doivent être répétées n fois, & l'erreur totale ſera $= n\lambda\tau^3 = \lambda\tau\tau T$; d'où l'on voit que, plus on prend l'intervalle τ petit, & plus ſera auſſi petite l'erreur totale qui en réſulte, nonobſtant la plus grande replication : dans la ſuppoſition qu'on n'emploie dans le calcul que les trois premiers termes, l'erreur totale ſera diminuée en raiſon du quarré de l'intervalle τ : & ſi l'on vouloit ſe ſervir de 4 termes, cette diminution ſuivroit la raiſon du cube de l'intervalle τ.

Remarque V. Il eſt donc toujours fort important de prendre les intervalles de tems τ auſſi petits que les circonſtances le permettent, quoiqu'en prenant pluſieurs termes des ſéries on puiſſe en admettre d'aſſez conſidérables. Cependant il eſt aiſé de ſe décider là-deſſus : car, ſuppoſant l'erreur d'une opération $= \lambda\tau^3$, en employant trois termes, ſi l'on veut paſſer au tems T écoulé de la premiere époque, on n'a qu'à égaler $\lambda\tau\tau T$ à l'erreur qu'on veut éviter dans le réſultat final, & de là on tirera la valeur du tems τ. Alors il ſeroit bien ſuperflu de prendre cet intervalle encore plus petit. C'eſt ainſi qu'on pourra atteindre à un degré de préciſion auſſi haut qu'on ſouhaite, & étendre cette détermination du mouvement à des tems très éloignés, ſans qu'on ait à craindre des erreurs ſenſibles.

OBSERVATION.

En conſidérant bien cette méthode, elle me paroit ſi aiſée & ſi propre à la pratique, au moyen des précautions que je viens d'indiquer,

quer, que nous pouvons aiſément renoncer à la ſolution complette, qui ſe fait par l'intégration. Car, quand même on réuſſiroit un jour à réſoudre le fameux probleme des trois corps, de ſorte qu'on pût déterminer en général par des expreſſions finies le mouvement de trois corps quelconques, qui s'attirent mutuellement, ces expreſſions ſeroient certainement ſi compliquées & enveloppées de toutes les quantités inconnues qui entrent dans le calcul, qu'il ſeroit peut-être impoſſible de les débrouiller & d'en faire l'application au calcul aſtronomique. Il faudroit ſans doute recourir à des approximations extrêmement embaraſſantes, & on riſqueroit toujours de ſe tromper beaucoup plus que ſuivant la méthode que je viens d'indiquer. Il eſt bien vrai qu'une telle ſolution nous montreroit également l'état du mouvement des trois corps pour tous les tems, quelque éloignés qu'ils fuſſent d'une certaine époque pour laquelle le mouvement ſeroit connu, & on ne ſe tromperoit gueres plus après pluſieurs ſiecles qu'après quelques heures, ſuppoſé que le mouvement eût été une fois parfaitement bien connu. Mais la moindre incertitude à cet égard, qu'on ne ſauroit jamais éviter, ôtera auſſi cette préférence à une ſolution parfaite. Pour peu qu'on ſe trompât dans la détermination du mouvement pour une époque fixe, les erreurs qui en réſulteroient dans la ſuite, iroient toujours en augmentant; & après un tems très conſidérable, elles rendroient les concluſions auſſi incertaines que la méthode propoſée. Je n'héſite donc pas à préférer cette méthode à la ſolution parfaite du probleme de trois corps, qu'on recherche avec tant d'empreſſement, vu que le calcul ſeroit non ſeulement incompablement plus difficile, mais que nous n'en ſerions pas moins incertains pour des tems fort éloignés.

Mais il y a plus: cette nouvelle méthode l'emporte auſſi à d'autres égards ſur la ſolution parfaite du probleme des trois corps, quand même on ſeroit aſſez heureux pour y réuſſir, & que l'application au calcul n'auroit aucune difficulté; puiſque, dès qu'un quatrieme corps y concourroit par ſon action, tout le ſuccès en ſeroit anéanti, à moins qu'on ne

pût

pût étendre la ſolution à quatre corps & plus, ce qu'on ne ſauroit jamais eſpérer, ſans parler des difficultés inſurmontables qui en réjailliroient ſur le calcul. Mais la méthode que je propoſe, s'exécute avec la même facilité, quelque grand que ſoit le nombre des corps qui agiſſent ſur celui dont on cherche le mouvement: on n'a qu'à en comprendre les forces dans les lettres P, Q, R, ce qui ſe fait ſans la moindre difficulté; & quand même quelque comete ſurviendroit, on en tiendroit compte auſſi aiſément ſans que le calcul en fût dérangé, ce qui ne ſauroit jamais ſe pratiquer dans l'autre méthode, qu'on regarde comme parfaite.

Cependant je ne ſaurois diſconvenir d'un aſſez grand inconvénient de ma méthode, qui eſt que, pour déterminer le lieu & le mouvement du corps pour quelque tems éloigné de l'époque établie dans le calcul, on eſt obligé de paſſer par tous les tems intermédiaires; & qu'on ne ſauroit, par exemple, aſſigner la place de la Lune après un an ſans calculer en même tems ſes places pour tous les jours. C'eſt ſans doute un très grand avantage des Tables Aſtronomiques, qu'elles nous découvrent d'abord pour tous les tems les lieux des corps céleſtes, ſans que nous ayons beſoin de ſuivre preſque pas à pas leurs mouvemens. Si cet avantage pouvoit ſubſiſter avec tous les dérangemens auxquels les corps céleſtes ſont aſſujettis, ce ſeroit ſans doute tout ce qu'on pourroit ſouhaiter. Mais, comme cet avantage n'eſt attaché qu'aux mouvemens réguliers, & à ceux tout au plus qui ne s'en écartent pas ſenſiblement, nous devrions bien y renoncer quand il s'agit de connoître plus exactement toutes les inégalités qui y ſont cauſées par leur action mutuelle. D'ailleurs, il n'eſt rien moins que ſuperflu de chercher pour tous les jours, & pour des intervalles plus petits encore, les lieux des corps céleſtes: & ceux qui s'occupent à calculer les éphémérides, ſuivent préciſément la même route. C'eſt ſans doute un grand travail que de calculer le lieu de la Lune par les Tables de feu M. *Meyer*, tant pour le midi que pour le minuit de chaque jour, dont M. *de la Lande* veut bien ſe charger dans la Connoiſſance des tems: & j'oſe preſque aſſûrer que, ſi l'on

vouloit calculer les lieux de la Lune pour les mêmes tems ſuivant cette nouvelle méthode, cela ſe pourroit faire avec moins de peine. Quand même cela couteroit un peu davantage, n'en ſeroit-on pas amplement récompenſé par le plus haut degré de préciſion, qu'on atteindroit par ce moyen, en rendant tout à fait inſenſibles les erreurs qui dans les tables peuvent bien monter juſqu'à une minute. Mais ce n'eſt pas encore tout: on pourroit même, ſans rendre le calcul plus pénible, tenir compte des forces que les planetes exercent ſur la Lune: & il eſt aſſez vraiſemblable que l'effet de Vénus & de Mars, & peut-être auſſi de Jupiter, eſt aſſez ſenſible, lorſque ces planetes ſe trouvent dans leurs périgées. Comme ceux qui calculent les éphémérides, déterminent pour tous les jours les lieux de ces planetes, la conſidération de leurs forces ſur la Lune n'augmenteroit preſque point les travaux du calcul, & ſi l'on étoit curieux d'apprendre ſi la derniere comete n'a rien changé dans le mouvement de la Lune, ce ſeroit ſans contredit le ſeul moyen de s'en aſſurer. Or, calculant pour tous les tems de ſuite les valeurs des trois coordonnées x, y, z, il eſt aiſé d'en déduire les déterminations dont on ſe ſert dans l'Aſtronomie: comme, ſi le plan OXY eſt celui de l'écliptique, & que la droite OI ſoit dirigée vers ſon commencement, l'angle XOY donnera la longitude, & l'angle YOZ la latitude; & je ne crois pas qu'il en valût la peine, de transformer nos formules primitives, pour en tirer immédiatement ces angles avec la diſtance OZ. Surtout, quand les dérangemens ſont très conſidérables, on fera mieux de s'en tenir aux formules les plus ſimples. Mais, pour ſatisfaire à ceux qui, ſelon la maniere reçue parmi les Aſtronomes, voudroient être éclaircis ſur les abſides, excentricités, lignes des nœuds & inclinaiſons des orbites, & les changemens cauſés dans ces élémens, je vais ajuſter les formules primitives à ce deſſein.

Sur la ligne des nœuds & l'inclinaiſon de l'orbite.

La direction du mouvement du corps Z avec le point fixe O détermine un plan, qu'on nomme le plan où le corps ſe meut à préſent, ou le plan de ſon orbite, & qui coupera le plan fixe OXY, auquel

quel on rapporte le mouvement, ſelon une ligne droite ON, qu'on nomme la ligne des nœuds. Ici il y a deux choſes qu'il faut introduire dans le calcul, premierement la poſition de cette ligne des nœuds ON, ou l'angle ION, qu'on nomme la longitude du nœud, & enſuite l'inclinaiſon de l'orbite au plan fixe OXY, ou bien l'angle que fait avec ce plan celui qui paſſe par le point Z & la ligne ON. Poſons donc

la longitude du nœud, ou l'angle ION $= \psi$

& l'inclinaiſon de l'orbite au plan fixe $= \omega$.

Outre cela, pour rapporter le lieu du corps Z à ces élémens, ſoit l'angle que fait la ligne OZ avec la ligne des nœuds ON qu'on nomme l'argument de latitude, ou l'angle ZON, $= \sigma$. Lorſque le mouvement du corps ſe fait dans le même plan, les deux angles ψ & ω demeurent invariables, ce qui arrive dans le mouvement régulier. Mais, dans le mouvement irrégulier, que j'ai ici principalement en vue, il faut conſidérer ces élémens comme variables, & alors leur variabilité ſe trouve dans un certain rapport avec l'angle σ, qu'on détermine le plus commodément par la Trigonométrie ſphérique.

I. En plaçant le point fixe O dans le centre de la ſphere, le plan fixe repréſentera ſur la ſurface le grand cercle INP, ſur lequel la ligne des nœuds marque le point N, & la direction fixe OI le point I; or Z ſoit le lieu apparent du corps ſur la ſurface de la ſphere. Qu'on tire l'arc d'un grand cercle ZN, qui repréſente le plan de l'orbite, & cet arc ſera meſuré par l'argument de latitude $\sigma = NOZ$: enfin l'angle PNZ ſera le même que celui de l'inclinaiſon ω, de ſorte que nous ayons ſur la ſphere Fig. 2.

l'arc IN $= \psi$; l'arc NZ $= \sigma$ & l'angle PNZ $= \omega$.

II. Maintenant, ſi la ligne des nœuds avec l'inclinaiſon eſt variable, ou bien que le plan de l'orbite change, il faut bien que ce plan changé paſſe encore par le même point Z, puiſque le lieu du corps peut être regardé comme commun à l'un & l'autre état. Suppoſons donc

donc que dans un inſtant la ligne des nœuds paſſe en n, & que le plan de l'orbite ſoit alors l'arc nZ: nous obtiendrons par-là $Nn = d\psi$ & l'inclinaiſon changée $PnZ = \omega + d\omega$. Qu'on tire nm perpendiculaire ſur NZ; & on aura $Nm = d\psi \cos\omega$, donc $Zn = \sigma - d\psi \cos\omega$, de ſorte que $- d\psi \cos\omega$ puiſſe être conſidéré comme le différentiel de σ.

III. Donc, tirant de Z ſur le cercle IP l'arc ZP perpendiculairement, puiſque le triangle ZNP donne $\sin ZP = \sin\sigma \sin\omega$, & le triangle ZnP donne $\sin ZP = \sin(\sigma - d\psi \cos\omega) \sin(\omega + d\omega)$, il eſt clair que le différentiel de la formule $\sin\sigma \sin\omega$ évanouit en poſant $d\sigma = - d\psi \cos\omega$. De là nous tirons:

$$-d\psi \cos\omega . \cos\sigma \cos\omega + d\omega \sin\sigma \cos\omega = 0, \text{ donc } d\psi = \frac{d\omega \sin\sigma}{\cos\sigma \sin\omega}$$

& partant les changemens de la ligne des nœuds & de l'inclinaiſon dépendent de telle ſorte l'un de l'autre, que connoiſſant l'un on détermine aiſément l'autre, ce qui nous ſera d'un très grand ſecours dans les recherches ſuivantes.

IV. Cette repréſentation ſur la ſphere nous fournit encore d'autres déterminations, qui demanderoient ſans ce moyen des calculs aſſez pénibles. D'abord, ſuppoſant que le corps parvienne de Z en z pendant que la ligne des nœuds avance de N en n, l'argument de latitude ſera à préſent l'arc nZz, & partant $= \sigma + d\sigma$: mais nous venons de trouver $nZ = \sigma - d\psi \cos\omega$, par conſéquent nous aurons $Zz = d\sigma + d\psi \cos\omega$. Or Zz marque l'angle élémentaire que le corps Z décrit un inſtant autour du point fixe O; donc, ſi nous poſons cet angle $= d\Phi$, nous aurons

$$d\Phi = d\sigma + d\psi \cos\omega, \quad \text{ou bien } d\sigma = d\Phi - d\psi \cos\omega$$

V. De là nous définirons auſſi aiſément le changement même qui ſe fait dans le plan de l'orbite, ou combien après un inſtant le plan de l'orbite eſt incliné à ſon plan précédent. Il eſt évident que l'angle NZn exprime ce changement élémentaire. Or cet angle ſe trou-

ve

ve $NZn = mn : \sin NZ$, qui à cauſe de $mn = d\psi \sin\omega$ ſe réduit à

$$NZn = \frac{d\psi \sin\omega}{\cos\sigma} = \frac{d\omega}{\cos\sigma}$$

de ſorte que cet angle eſt toujours plus grand que le changement de l'inclinaiſon.

Introduction de ces nouveaux élémens dans le calcul.

I. Poſant donc l'angle $ION = \psi$, qu'on tire du point Y ſur la ligne des nœuds ON, la perpendiculaire YN, & la droite ZN y étant auſſi perpendiculaire, l'angle YNZ meſurera l'inclinaiſon de l'orbite, de ſorte que $YNZ = \omega$. Enſuite, tirant la droite OZ, nous aurons l'angle $NOZ = \sigma$. Soit maintenant la diſtance du corps Z au point fixe O, ou $OZ = v$, & de là nous aurons: Fig. 5.

$$ON = v \cos\sigma \quad \& \quad ZN = v \sin\sigma$$

d'où le triangle NZY fournit

$$ZY = v \sin\sigma \sin\omega \quad \& \quad NY = v \sin\sigma \cos\omega.$$

De là nous déterminerons nos trois coordonnées de la maniere ſuivante

$$OX = x = ON\cos\psi - NY \sin\psi = v\cos\sigma\cos\psi - v\sin\sigma\cos\omega\sin\psi$$

$$XY = y = ON\sin\psi + NY\cos\psi = v\cos\sigma\sin\psi + v\sin\sigma\cos\omega\cos\psi$$

& $YZ = z = v \sin\sigma \sin\omega$.

II. Que dans le tems dt le corps avance de Z en z, pour avoir $Oz = v + dv$, & puiſque l'angle élémentaire $ZOz = d\Phi = d\sigma + d\psi \cos\omega$, comme nous venons de trouver, nous aurons l'élément $Zz = \sqrt{(dv^2 + vv\,d\Phi^2)}$. Mais, par les coordonnées, ce même élément eſt $Zz = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$, de ſorte que

$$dv^2 + vv\,d\Phi^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

& partant prenant les différentiels, en écrivant pour $\mathrm{d}\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}\mathrm{d}z$, leurs valeurs des formules primitives:

$$\mathrm{d}.(\mathrm{d}v^2 + vv\mathrm{d}\Phi^2) = \frac{2\mathrm{d}t^2}{a}(P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z)$$

ou en indiquant seulement les intégrales:

$$\mathrm{d}v^2 + vv\mathrm{d}\Phi^2 = \frac{2\mathrm{d}t^2}{a}\int(P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z).$$

III. Mais, pour éliminer aussi les différentiels $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ & $\mathrm{d}z$, je remarque que les différentiels qui se rapportent au changement du point Z, doivent provenir les mêmes, soit qu'on prenne les angles ψ & ω variables, soit qu'on les suppose constans, en mettant alors $\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}\Phi$, puisque le point z appartient également au plan primitif de l'orbite qu'au changé: cette remarque abrégera très considérablement les différentiations que nous avons à faire; cependant si l'on veut se donner la peine de différentier en général, on arrivera aux mêmes résultats, pourvu qu'on tienne compte de $\mathrm{d}\psi = \frac{\mathrm{d}\omega \sin\sigma}{\cos\sigma \int\omega}$, & qu'on mette $\mathrm{d}\Phi$ à la place de $\mathrm{d}\sigma + \mathrm{d}\psi \cos\omega$.

IV. Ayant donc par les formules trouvées

$$\frac{x}{z} = \frac{\cos\sigma\cos\psi}{\sin\sigma\sin\omega} - \frac{\cos\omega\int\psi}{\int\omega} \;\&\; \frac{y}{z} = \frac{\cos\sigma\int\psi}{\int\sigma\int\omega} + \frac{\cos\omega\cos\psi}{\int\omega}$$

nous en tirerons par la différentiation

$$\frac{z\mathrm{d}x - x\mathrm{d}z}{zz} = \frac{-\mathrm{d}\Phi\cos\psi}{\int\sigma^2\int\omega} \;\&\; \frac{z\mathrm{d}y - y\mathrm{d}z}{zz} = \frac{-\mathrm{d}\Phi\int\psi}{\int\sigma^2\int\omega}.$$

Multiplions, par $zz = vv\sin\sigma^2\sin\omega^2$, & nous aurons

$x\mathrm{d}z - z\mathrm{d}x = vv\mathrm{d}\Phi\int\omega\cos\psi$ & $y\mathrm{d}z - z\mathrm{d}y = vv\mathrm{d}\Phi\sin\omega\sin\psi$,

& en combinant ces deux équations:

$z(x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x) = vv\mathrm{d}\Phi\int\omega(y\cos\psi - x\int\psi) = v^3\mathrm{d}\Phi\int\sigma\int\omega\cos\omega$

d'où s'ensuit $x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = vv\,\mathrm{d}\Phi\cos\omega$.

V. Ces

V. Ces formules ſont très propres à l'application de nos équations primitives, qui nous fourniſſent

$$x\,\mathrm{d}\mathrm{d}z - z\,\mathrm{d}\mathrm{d}x = \mathrm{d}.\,vv\mathrm{d}\Phi\,\mathrm{cof}\omega\,\mathrm{cof}\psi = \frac{\mathrm{d}t^2}{\alpha}\,(\mathrm{R}x - \mathrm{P}z)$$

$$y\,\mathrm{d}\mathrm{d}z - z\,\mathrm{d}\mathrm{d}y = \mathrm{d}.\,vv\mathrm{d}\Phi\,\mathrm{cof}\omega\,\sin\psi = \frac{\mathrm{d}t^2}{\alpha}\,(\mathrm{R}y - \mathrm{Q}z)$$

$$x\,\mathrm{d}\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}\mathrm{d}x = \mathrm{d}.\,vv\mathrm{d}\Phi\,\mathrm{cof}\omega = \frac{\mathrm{d}t^2}{\alpha}\,(\mathrm{Q}x - \mathrm{P}y)$$

dont les deux premieres donnent par le développement:

$$\mathrm{cof}\psi\,\mathrm{d}.vv\mathrm{d}\Phi\,\mathrm{cof}\omega - vv\mathrm{d}\Phi\,\mathrm{d}\psi\,\mathrm{cof}\omega\,\sin\psi = \frac{\mathrm{d}t^2}{\alpha}\,(\mathrm{R}x - \mathrm{P}z)$$

$$\sin\psi.\,\mathrm{d}vv\mathrm{d}\Phi\,\mathrm{cof}\omega + vv\mathrm{d}\Phi\,\mathrm{d}\psi\,\mathrm{cof}\omega\,\mathrm{cof}\psi = \frac{\mathrm{d}t^2}{\alpha}\,(\mathrm{R}y - \mathrm{Q}z)$$

d'où éliminant le membre $\mathrm{d}.vv\mathrm{d}\Phi\,\mathrm{cof}\omega$

$$vv\mathrm{d}\Phi\mathrm{d}\psi\,\mathrm{cof}\omega = \frac{\mathrm{d}t^2}{\alpha}\,(\mathrm{R}(y\,\mathrm{cof}\psi - x\,\mathrm{cof}\psi) + z(\mathrm{P}\,\mathrm{cof}\psi - \mathrm{Q}\,\mathrm{cof}\psi))$$

ou $$vv\mathrm{d}\Phi\mathrm{d}\psi\,\mathrm{cof}\omega = \frac{\mathrm{d}t^2}{\alpha}\,(\mathrm{R}v\,\mathrm{cof}\sigma\,\mathrm{cof}\omega + v\,\mathrm{cof}\sigma\,\mathrm{cof}\omega(\mathrm{P}\,\mathrm{cof}\psi - \mathrm{Q}\,\mathrm{cof}\psi))$$

donc $$\mathrm{d}\psi = \frac{\mathrm{d}t^2\sin\sigma}{\alpha v\mathrm{d}\Phi}\,(\mathrm{R}\cot\omega + \mathrm{P}\sin\psi - \mathrm{Q}\,\mathrm{cof}\psi)$$

& $$\frac{\mathrm{d}\omega}{\sin\omega} = \frac{\mathrm{d}t^2\,\mathrm{cof}\sigma}{\alpha v\mathrm{d}\Phi}\,(\mathrm{R}\cot\omega + \mathrm{P}\sin\psi - \mathrm{Q}\,\mathrm{cof}\psi).$$

Ces deux équations renferment les variations que la ligne des nœuds & l'inclination de l'orbite ſubiſſent.

VI. Mais, en éliminant des deux équations précédentes l'élément $\mathrm{d}\psi$, nous obtiendrons:

$$\mathrm{d}.vv\mathrm{d}\Phi\sin\omega = \frac{\mathrm{d}t^2}{\alpha}\,(\mathrm{R}(x\,\mathrm{cof}\psi + y\,\mathrm{cof}\psi) - z(\mathrm{P}\,\mathrm{cof}\psi + \mathrm{Q}\,\mathrm{cof}\psi))$$

qu'on

qu'on combinera avec ſuccès avec la troiſieme de l'art. préc.

$$\mathrm{d}.vv\mathrm{d}\phi\cos\omega = \frac{\mathrm{d}t^2}{a}(Qx - Py).$$

Or, en développant ces deux différentiels, & en éliminant tantôt le différ. de $vv\mathrm{d}\phi$, tantôt $\mathrm{d}\omega$, nous trouverons enfin en ſubſtituant à x, y, z, les valeurs trouvées ci-deſſus:

$$vv\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\omega = \frac{v\,\mathrm{d}t^2\cos\sigma}{a}(R\cos\omega + P\sin\omega\sin\psi - Q\sin\omega\cos\psi) \;\&$$

$$\mathrm{d}.vv\,\mathrm{d}\phi = \frac{v\mathrm{d}t^2}{a}(R\cos\sigma\sin\omega - P(\sin\sigma\cos\psi + \cos\sigma\sin\psi\cos\omega) - Q(\sin\sigma\sin\psi - \cos\sigma\cos\psi\cos\omega))$$

dont celle-là convient avec la derniere que j'ai trouvée tantôt. Or celle-ci étant multipliée par $2vv\mathrm{d}\phi$ & intégrée, donne:

$$v^4\mathrm{d}\phi^2 = \frac{2\,\mathrm{d}t^2}{a}\int v^3\mathrm{d}\phi\,(R\cos\sigma\sin\omega - P(\sin\sigma\cos\psi + \cos\omega) - Q(\sin\sigma\sin\psi - \cos\sigma\cos\psi\cos\omega))$$

d'où l'on obtient la valeur de $vv\mathrm{d}\phi^2$ pour la premiere équation trouvée N°. II.

VII. Il ne reſte donc qu'à définir les valeurs des différentiels $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ & $\mathrm{d}z$, pour les ſubſtituer dans la premiere équation. Or, pour $\mathrm{d}z$ ayant $lz = lv + l\sin\sigma + l\sin\omega$, on trouve

$$\frac{\mathrm{d}z}{z} = \frac{\mathrm{d}v}{v} + \frac{\mathrm{d}\sigma\cos\sigma}{\sin\sigma} + \frac{\mathrm{d}\omega\cos\omega}{\sin\omega}$$

qui, à cauſe de $\mathrm{d}\omega = \frac{\mathrm{d}\psi\cos\sigma\sin\omega}{\sin\sigma}$ & $\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}\phi - \mathrm{d}\psi\cos\omega$,

ou ſimplement de $\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}\phi - \frac{\mathrm{d}\omega\sin\sigma\cos\omega}{\cos\sigma\sin\omega}$, ſe réduit à

$$\frac{\mathrm{d}z}{z} = \frac{\mathrm{d}v}{v} + \frac{\mathrm{d}\phi\cos\sigma}{\sin\sigma} \text{ ou } \mathrm{d}z = \mathrm{d}v\sin\sigma\sin\omega + v\mathrm{d}\phi\cos\sigma\sin\omega.$$

En-

Enſuite nous tirons des autres formules de N°. IV.

$$dx = \frac{x\,dz}{z} + \frac{v\,d\Phi\,\cos\psi}{\sin\sigma} \;\&\; dy = \frac{y\,dz}{z} - \frac{v\,d\Phi\,\sin\psi}{\sin\sigma}$$

qui ſe réduiſent à ces formes:

$$dx = \frac{x\,dv}{v} - v\,d\Phi\,(\sin\sigma\,\cos\psi + \cos\sigma\,\cos\omega\,\sin\psi)$$

$$dy = \frac{y\,dv}{v} - v\,d\Phi\,(\sin\sigma\,\sin\psi - \cos\sigma\,\cos\omega\,\cos\psi)$$

dont on peut ſubſtituer les valeurs dans l'équation

$$d.(dv^2 + vv\,d\Phi^2) = \frac{2\,dt^2}{\alpha}\,(P\,dx + Q\,dy + R\,dz).$$

VIII. Les formules compoſées d'angles, qui entrent dans ces équations, peuvent très commodément ſe repréſenter par la Trigonométrie ſphérique. Soit pour cet effet comme ci-deſſus:

l'arc $IN = \psi$; l'arc $NZ = \sigma$ & l'angle $KNZ = \omega$;

qu'on prolonge l'arc IN juſqu'en K, & l'arc ZN juſqu'en V de ſorte que IK & ZV ſoient des quarts de cercle, & qu'on tire les arcs de grands cercles IZ, KZ, IV & KV, de même que les perpendiculaires ZP & VQ ſur IK. Cela poſé, on aura

$$\sin ZP = \sin\sigma\,\sin\omega \;:\; \sin VQ = \cos\sigma\,\sin\omega$$

$$\cos IZ = \cos\sigma\cos\psi - \sin\sigma\sin\psi\cos\omega : \cos KZ = \cos\sigma\sin\psi + \sin\sigma\cos\psi\,c.\omega$$

$$\cos IV = \sin\sigma\cos\psi + \cos\sigma\sin\psi\cos\omega : \cos KV = \sin\sigma\sin\psi - \cos\sigma\,c.\psi\,c.\omega$$

d'où nous tirons:

$$x = v\,\cos IZ; \quad y = v\,\cos KZ; \quad z = v\,\sin ZP$$

$$dx = dv\cos IZ - v\,d\Phi\cos IV; \; dy = dv\cos KZ - v\,d\Phi\cos KV;$$

$$dz = dv\,\sin ZP + v\,d\Phi\,\sin VQ.$$

IX. Mais, sans entrer dans un plus grand détail de ces formules, qui dépendent des forces dont le corps est sollicité, je me bornerai à montrer comment on doit s'y prendre pour les résoudre par la méthode générale que je viens de proposer. Or les deux dernieres équations étant développées donnent

$$2v\,dv\,d\Phi + v\,v\,dd\Phi = \frac{v\,dt^2}{a}(R\,\text{sin}VQ - P\,\text{cos}IV - Q\,\text{cos}KV)$$

$$dv\,dd\upsilon + v\,dv\,d\Phi^2 + v\,v\,d\Phi\,dd\Phi = \frac{dt^2}{a}(P\,dv\,\text{cos}IZ + Q\,dv\,\text{cos}KZ +$$

$$R\,dv\,\text{sin}ZP - \frac{v\,dt^2\,d\Phi}{a}(P\,\text{cos}IV + Q\,\text{cos}KV - R\,\text{sin}VQ)$$

Otons de celle-ci celle-là multipliée par $d\Phi$, & divisant par dv nous aurons :

$$dd\upsilon - v\,d\Phi^2 = \frac{dt^2}{a}(P\,\text{cos}IZ + Q\,\text{cos}KZ + R\,\text{sin}ZP)$$

& divisant la premiere par v:

$$2\,dv\,d\Phi + v\,dd\Phi = \frac{dt^2}{a}(R\,\text{sin}VQ - P\,\text{cos}IV - Q\,\text{cos}KV).$$

X. Soit maintenant $dv = p\,dt$; $d\Phi = q\,dt$, $d\psi = r\,dt$, & partant

$$d\omega = \frac{r\,dt\,\text{cos}\sigma\,\text{sin}\,\omega}{\text{sin}\,\sigma} \;\&\; d\sigma = dt\,(q - r\,\text{cos}\,\omega) \text{ de sorte que}$$

$$dp = v\,q\,q\,dt + \frac{dt}{a}(P\,\text{cos}IZ + Q\,\text{cos}KZ + R\,\text{sin}ZP)$$

$$dq = -\frac{2\,p\,q\,dt}{v} + \frac{dt}{a\,v}(R\,\text{sin}VQ - P\,\text{cos}IV - Q\,\text{cos}KV)$$

$$\&\quad r = \frac{dt\,\text{sin}\,\sigma}{a\,v\,q}(R\,\text{cot}\,\omega + P\,\text{sin}\,\psi - Q\,\text{cos}\,\psi).$$

Donc

Donc, ſi pour une époque donnée, qui répond au tems t, on connoit les quantités v, Φ, p, q, ψ, ω & σ, on en trouvera pour tout autre tems $t+\tau$ ces mêmes élémens v', Φ', p', q', ψ', ω', σ', par la formule générale $z' = z + \frac{\tau \mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + \frac{\tau^2 \mathrm{d}\mathrm{d}z}{2\mathrm{d}t^2} + \frac{\tau^3 \mathrm{d}^3 z}{6\mathrm{d}t^3}$ + etc. en ſorte que

$$v' = v + \tau p + \frac{\tau\tau \mathrm{d}p}{2\mathrm{d}t} + \frac{\tau^3 \mathrm{d}\mathrm{d}p}{6\mathrm{d}t^2}$$

$$\Phi' = \Phi + \tau q + \frac{\tau\tau \mathrm{d}q}{2\mathrm{d}t} + \frac{\tau^3 \mathrm{d}\mathrm{d}q}{6\mathrm{d}t^2} + \text{etc.}$$

$$p' = p + \frac{\tau \mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} + \frac{\tau\tau \mathrm{d}\mathrm{d}p}{2\mathrm{d}t^2} + \frac{\tau^3 \mathrm{d}^3 p}{6\mathrm{d}t^3} + \text{etc.}$$

$$q' = q + \frac{\tau \mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{\tau\tau \mathrm{d}\mathrm{d}q}{2\mathrm{d}t^2} + \frac{\tau^3 \mathrm{d}^3 q}{6\mathrm{d}t^3} + \text{etc.}$$

$$\psi' = \psi + \tau r + \frac{\tau\tau \mathrm{d}r}{2\mathrm{d}t} + \frac{\tau^3 \mathrm{d}\mathrm{d}r}{6\mathrm{d}t^2}$$

$$\omega' = \omega + \frac{\tau \mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + \frac{\tau\tau \mathrm{d}\mathrm{d}\omega}{2\mathrm{d}t^2} + \frac{\tau^3 \mathrm{d}^3 \omega}{6\mathrm{d}t^3} + \text{etc.}$$

$$\sigma' = \sigma + \frac{\tau \mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} + \frac{\tau\tau \mathrm{d}\mathrm{d}\sigma}{2\mathrm{d}t^2} + \frac{\tau^3 \mathrm{d}^3 \sigma}{6\mathrm{d}t^3} + \text{etc.}$$

XI. Je remarque ici, qu'il n'eſt pas néceſſaire de déterminer pour chaque tems l'angle Φ, qui n'exiſte preſque que dans notre imagination; il ſuffit de ſavoir la valeur de $\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = q$, pour en trouver l'argument de latitude σ: ainſi on peut entierement ſe paſſer de l'angle Φ. Cependant il n'eſt que trop évident que cette maniere de concevoir le mouvement du corps, eſt beaucoup plus embarraſſante & plus pénible que celle que j'ai propoſée au commencement, où j'ai calculé immédiatement les trois coordonnées qui déterminent le mouve-

ment du corps: & on ſe précipiteroit encore dans un plus grand embarras, ſi l'on vouloit introduire dans le calcul la ligne des abſides avec l'excentricité. Et partant je conſeille à ceux qui voudront ſe ſervir de cette méthode pour déterminer les dérangemens des corps céleſtes, de s'en tenir aux premieres regles, & d'appliquer le calcul immédiatement aux trois coordonnées.

APPLICATION DE CETTE MÉTHODE *aux forces réelles du Ciel.*

Fig. 1. Soit A la maſſe du corps auquel on veut rapporter le mouvement des autres corps, & qu'on regarde comme étant en repos, quoiqu'il ait un mouvement quelconque. Que B ſoit la maſſe du corps en B, dont nous cherchons principalement le mouvement; & qu'un troiſieme corps qui y agit ſoit en C, ſa maſſe étant $=$ C. Sur un plan fixe tiré par A, on baiſſe de B & C les perpendiculaires BY & Cy, & de là à la droite fixe AI les perpendiculaires YX & yx, pour avoir pour le lieu de chaque corps les trois coordonnées, que je nommerai:

$$AX = x;\ XY = y;\ YB = z:\ Ax = \mathfrak{x};\ xy = \mathfrak{y};\ yC = \mathfrak{z};$$

ſoient outre cela les diſtances au corps A

$$AB = v \qquad \& \quad AC = \mathfrak{v}, \quad \text{de ſorte que}$$

$$vv = xx + yy + zz \quad \& \quad \mathfrak{v}\mathfrak{v} = \mathfrak{x}\mathfrak{x} + \mathfrak{y}\mathfrak{y} + \mathfrak{z}\mathfrak{z}.$$

Enſuite, ſoit la diſtance BC $= w$ & on aura

$$ww = (x-\mathfrak{x})^2 + (y-\mathfrak{y})^2 + (z-\mathfrak{z})^2 = vv + \mathfrak{v}\mathfrak{v} - 2x\mathfrak{x} - 2y\mathfrak{y} - 2z\mathfrak{z}.$$

Cela poſé, le corps B eſt premierement attiré par le corps A par la force $= \frac{A}{vv}$, & enſuite par le corps C par la force $= \frac{C}{ww}$, qu'on décompoſe ſelon les directions BA & BE, paralleles à AC, d'où réſulte la force ſelon BA $= \frac{Cv}{w^3}$ & ſelon BE $= \frac{C\mathfrak{v}}{w^3}$. Or, le corps A étant lui-même attiré par le corps B par la force ſelon AB $= \frac{B}{vv}$, & par le corps C par la force

force ſelon $AC = \frac{C}{\mathfrak{v}\mathfrak{v}}$, pour maintenir le corps A en repos, il faut tranſporter ces deux forces en ſens contraire ſur le corps B, d'où les forces qui agiſſent ſur le corps B, ſe réduiſent à ces deux :

$$\text{ſelon } BA = \frac{A+B}{vv} + \frac{Cv}{w^3}\text{; \& ſelon } BE = \frac{C\mathfrak{v}}{w^3} - \frac{C}{\mathfrak{v}\mathfrak{v}}$$

d'où l'on tirera les forces P, Q, R, qui agiſſent ſur le corps B ſelon les directions des trois coordonnées AX, XY & Y B, qui ſeront exprimées de cette ſorte :

$$P = -x\left(\frac{A+B}{v^3} + \frac{C}{w^3}\right) + \mathfrak{x}\left(\frac{C}{w^3} - \frac{C}{\mathfrak{v}^3}\right)$$

$$Q = -y\left(\frac{A+B}{v^3} + \frac{C}{w^3}\right) + \mathfrak{y}\left(\frac{C}{w^3} - \frac{C}{\mathfrak{v}^3}\right)$$

$$R = -z\left(\frac{A+B}{v^3} + \frac{C}{w^3}\right) + \mathfrak{z}\left(\frac{C}{w^3} - \frac{C}{\mathfrak{v}^3}\right)$$

& maintenant le mouvement du corps B ſera contenu dans ces trois formules

$$\alpha\,ddx = P\,dt^2\text{; } \alpha\,ddy = Q\,dt^2\text{; } \alpha\,ddz = R\,dt^2.$$

Méthode de déterminer le mouvement de trois corps qui s'attirent mutuellement.

Puiſque le mouvement du corps C eſt auſſi bien connu que celui du corps B, il eſt aiſé d'en exprimer le mouvement par des formules ſemblables; qu'on poſe pour cet effet :

$$\mathfrak{P} = -\mathfrak{x}\left(\frac{A+C}{\mathfrak{v}^3} + \frac{B}{w^3}\right) + x\left(\frac{B}{w^3} - \frac{B}{v^3}\right)$$

$$\mathfrak{Q} = -\mathfrak{y}\left(\frac{A+C}{\mathfrak{v}^3} + \frac{B}{w^3}\right) + y\left(\frac{B}{w^3} - \frac{B}{v^3}\right)$$

$$\mathfrak{R} = -\mathfrak{z}\left(\frac{A+C}{\mathfrak{v}^3} + \frac{B}{w^3}\right) + z\left(\frac{B}{w^3} - \frac{B}{v^3}\right)$$

& le mouvement du corps C ſera déterminé par ces trois formules

$$\alpha \mathrm{d}\mathrm{d}\xi = \mathfrak{P}\mathrm{d}t^2; \quad \alpha \mathrm{d}\mathrm{d}\eta = \mathfrak{Q}\mathrm{d}t^2; \quad \alpha \mathrm{d}\mathrm{d}\zeta = \mathfrak{R}\mathrm{d}t^2.$$

Voyons maintenant quel uſage on peut tirer de ces ſix formules, pour déterminer le mouvement des deux corps B & C.

I. Or d'abord il faut ſuppoſer que, pour une certaine époque qui répond au tems t, tant le lieu que le mouvement de chaque corps B & C eſt connu, & partant les quantités ſuivantes, entant qu'elles répondent au tems t ſont données

$$x, y, z \quad \& \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = p; \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = q; \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = r$$

$$\xi, \eta, \zeta \quad \& \quad \frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} = \mathfrak{p}; \quad \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t} = \mathfrak{q}; \quad \frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}t} = \mathfrak{r}$$

& enſuite les formules trouvées nous fourniſſent:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\alpha}\mathrm{P}; \quad \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\alpha}\mathrm{Q}; \quad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\alpha}\mathrm{R};$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathfrak{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\alpha}\mathfrak{P}; \quad \frac{\mathrm{d}\mathfrak{q}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\alpha}\mathfrak{Q}; \quad \frac{\mathrm{d}\mathfrak{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\alpha}\mathfrak{R}.$$

II. De là on peut paſſer aux différentiels plus hauts, ayant

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{xp + yq + zr}{v}; \quad \frac{\mathrm{d}\mathfrak{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\xi\mathfrak{p} + \eta\mathfrak{q} + \zeta\mathfrak{r}}{\mathfrak{v}} \quad \&$$

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = \frac{(x-\xi)(p-\mathfrak{p}) + (y-\eta)(q-\mathfrak{q}) + (z-\zeta)(r-\mathfrak{r})}{w}$$

d'où l'on formera les valeurs:

$$\frac{\mathrm{d}\mathrm{P}}{\mathrm{d}t}; \quad \frac{\mathrm{d}\mathrm{Q}}{\mathrm{d}t}; \quad \frac{\mathrm{d}\mathrm{R}}{\mathrm{d}t} \quad \& \quad \frac{\mathrm{d}\mathfrak{P}}{\mathrm{d}t}; \quad \frac{\mathrm{d}\mathfrak{Q}}{\mathrm{d}t}; \quad \frac{\mathrm{d}\mathfrak{R}}{\mathrm{d}t}$$

qui renfermeront, outre les coordonnées x, y, z & ξ, η, ζ, encore les lettres p, q, r & $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ pareillement connues. Or les différen-

rentielles de celles-ci étant auſſi connues; on trouvera auſſi les formules différentielles ſuivantes:

$$\frac{ddP}{dt^2};\quad \frac{ddQ}{dt^2};\quad \frac{ddR}{dt^2}\quad \&\quad \frac{dd\mathfrak{P}}{dt^2};\quad \frac{dd\mathfrak{Q}}{dt^2};\quad \frac{dd\mathfrak{R}}{dt^2}$$

leſquelles renfermant, outre les lettres précédentes, encore les quantités P, Q, R & $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, dont nous avons déjà aſſigné les différentielles, on pourra par la différentiation réitérée parvenir aux valeurs différentielles plus hautes, auſſi loin qu'on le jugera à propos.

III. Ayant déterminé toutes ces valeurs, on en tirera aiſément tant les lieux que les mouvemens de nos deux corps B & C, après un tems τ écoulé depuis l'époque marquée. Car, marquant pour le lieu de l'un & de l'autre corps les coordonnées par les lettres x', y', z', & $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{y}'$, $\mathfrak{z}'$, & pour leur mouvement les viteſſes ſelon ces trois directions par les lettres

$$p' = \frac{dx'}{dt};\ q' = \frac{dy'}{dt};\ r' = \frac{dz'}{dt};\ \&\ \mathfrak{p}' = \frac{d\mathfrak{x}'}{dt};\ \mathfrak{q}' = \frac{d\mathfrak{y}'}{dt};\ \mathfrak{r}' = \frac{d\mathfrak{z}'}{dt}$$

on aura: pour le corps B

$$x' = x + \tau p + \frac{\tau^2 P}{2\alpha} + \frac{\tau^3 dP}{6\alpha dt}\cdots;\quad p' = p + \frac{\tau P}{\alpha} + \frac{\tau^2 dP}{2\alpha dt}\cdots$$

$$y' = y + \tau q + \frac{\tau^2 Q}{2\alpha} + \frac{\tau^3 dQ}{6\alpha dt}\cdots;\quad q' = q + \frac{\tau Q}{\alpha} + \frac{\tau^2 dQ}{2\alpha dt}\cdots$$

$$z' = z + \tau r + \frac{\tau^2 R}{2\alpha} + \frac{\tau^3 dR}{6\alpha dt};\qquad r' = r + \frac{\tau R}{\alpha} + \frac{\tau^2 dR}{2\alpha dt}$$

& de la même maniere pour le corps C

$$\mathfrak{x}' = \mathfrak{x} + \tau\mathfrak{p} + \frac{\tau^2 \mathfrak{P}}{2\alpha} + \frac{\tau^3 d\mathfrak{P}}{6\alpha dt}\cdots;\quad \mathfrak{p}' = \mathfrak{p} + \frac{\tau\mathfrak{P}}{\alpha} + \frac{\tau^2 d\mathfrak{P}}{2\alpha dt}\cdots$$

$$\mathfrak{y}' = \mathfrak{y} + \tau\mathfrak{q} + \frac{\tau^2 \mathfrak{Q}}{2\alpha} + \frac{\tau^3 d\mathfrak{Q}}{6\alpha dt}\cdots;\quad \mathfrak{q}' = \mathfrak{q} + \frac{\tau\mathfrak{Q}}{\alpha} + \frac{\tau^2 d\mathfrak{Q}}{2\alpha dt}\cdots$$

$$\mathfrak{z}' = \mathfrak{z} + \tau\mathfrak{r} + \frac{\tau^2 \mathfrak{R}}{2\alpha} + \frac{\tau^3 d\mathfrak{R}}{6\alpha dt}\cdots;\quad \mathfrak{r}' = \mathfrak{r} + \frac{\tau\mathfrak{R}}{\alpha} + \frac{\tau^2 d\mathfrak{R}}{2\alpha dt}\cdots$$

IV.

IV. Plus on prend petit l'intervalle de tems τ, & moins on a beſoin de termes dans ces expreſſions; & je crois même qu'on feroit fort bien de ne prendre le tems τ qu'aſſez grand, pour qu'on pût ſe paſſer des termes qui renferment les différentiels des quantités P, Q, R & $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, ſans porter aucune atteinte à la préciſion. Par là on ſera diſpenſé du travail aſſez ennuyeux de chercher ces valeurs différentielles qui deviendroient extrêmement compliquées. Alors, ayant déterminé l'état des deux corps pour le tems $t + \tau$, on pourſuivra de la même maniere le calcul pour arriver à des tems plus éloignés de la premiere époque, en prenant les précautions que j'ai indiquées ci-deſſus.

V. Je crois que cette méthode eſt non ſeulement la plus ſimple qu'on puiſſe employer dans ces recherches, mais qu'elle eſt auſſi la ſeule qu'on puiſſe pratiquer avec ſuccès. En effet, quand même on réuſſiroit à trouver les intégrales des formules différentio-différentielles qui renferment le mouvement déſiré, ce qu'on ne ſauroit pourtant eſpérer, je ſuis aſſuré qu'on feroit toujours mieux de ſe ſervir de la méthode que je viens d'expoſer, & qu'on pourroit même porter les recherches à un plus haut degré de préciſion. Outre cela, on comprend aiſément qu'on peut étendre cette méthode avec le même ſuccès à l'attraction de quatre corps & plus, ſans que le calcul devienne beaucoup plus embarraſſé: de la même maniere que l'action du corps C a été ici introduite dans le calcul, on y introduiroit encore celle d'un corps D, & même de pluſieurs E, F etc. Les regles expoſées ſeront auſſi ſuffiſantes pour déterminer le mouvement de chacun ſéparément.

VI. Mais ordinairement, quand on recherche les dérangemens dans le mouvement d'un corps céleſte, on peut regarder comme connu le mouvement des autres corps qui cauſent ces dérangemens. Car, quoique leur mouvement ſouffre auſſi par leur action mutuelle, on peut toujours le conſidérer comme à peu près connu, & cela ſuffit, puiſqu'une petite erreur dans la poſition du corps troublant n'eſt preſque d'aucune

cune conſéquence dans le corps troublé. Cependant, puiſqu'il eſt auſſi intéreſſant de connoître en même tems les dérangemens de tous les corps, rien n'empêche qu'on ne mette d'abord en pratique la méthode que je viens de propoſer.

Mais, ſi les dérangemens ſont fort petits & qu'on veuille ſe contenter d'un moindre degré de préciſion, je ne diſconviens point qu'il vaut alors mieux déterminer ces dérangemens dans les élémens, par leſquels les Aſtronomes ont accoutumé de repréſenter les orbites des corps céleſtes. Pour cette raiſon, j'ajoute les recherches ſuivantes.

Sur la détermination des dérangemens extrêmement petits.

Outre les dénominations employées ci-deſſus, ſoit AN la ligne des nœuds pour l'orbite du corps B, & poſons:

la longitude du nœud $IAN = \psi$

l'inclinaiſon de l'orbite ou l'angle $BNY = \omega$

l'argument de latitude ou l'angle $NAB = \sigma$

la diſtance AB étant $= v$, & l'angle élémentaire décrit par le corps B, dans le tems dt, autour de $A = d\Phi$.

Cela poſé, nous avons vu que les coordonnées ſont exprimées ainſi:

$x = v(\cos\sigma\cos\psi - \sin\sigma\sin\psi\cos\omega)$; $y = v(\cos\sigma\sin\psi + \sin\sigma\cos\psi\cos\omega)$

& $z = v\sin\sigma\sin\omega$.

Enſuite, pour le corps C ſoit

la longitude ou l'angle $IAy = \zeta$

la latitude ou l'angle $yAC = \eta$

& la diſtance $AC = u$, que j'ai indiquée auparavant par la lettre allemande $\mathfrak{v}$. De là nous aurons les coordonnées:

$\xi = u\cos\eta\cos\zeta$; $\upsilon = u\cos\eta\sin\zeta$ & $\zeta = u\sin\eta$,

d'où nous tirons $x\xi + y\upsilon = vu\cos.\eta\,(\cos\sigma\cos.(\zeta-\psi) + \sin\sigma\sin(\zeta-\psi)\cos.\omega)$

donc $x\xi + y\upsilon + z\zeta = vu\,(\sin\eta\,\sin\sigma\,\sin\omega + \cos\eta\cos\sigma\cos(\zeta-\psi) + \cos\eta\sin\sigma\sin(\zeta-\psi)\cos\omega)$,

formule qui exprime le cosinus de l'angle BAC multiplié par vu: donc, posant cet angle $BAC = \theta$, de sorte que

$$\cos\theta = \sin\eta\,\sin\sigma\,\sin\omega + \cos\eta\cos\sigma\cos(\zeta-\psi) + \cos\eta\sin\sigma\sin(\zeta-\psi)\cos\omega,$$

nous aurons $ww = vv + uu - 2vu\cos\theta$, & de là nos trois forces qui agissent sur le corps B seront:

$$P = -x\left(\frac{A+B}{v^3} + \frac{C}{w^3}\right) + u\cos\eta\cos\zeta\left(\frac{C}{w^3} - \frac{C}{u^3}\right)$$

$$Q = -y\left(\frac{A+B}{v^3} + \frac{C}{w^3}\right) + u\cos\eta\sin\zeta\left(\frac{C}{w^3} - \frac{C}{u^3}\right)$$

$$R = -z\left(\frac{A+B}{v^3} + \frac{C}{w^3}\right) + u\sin\eta\left(\frac{C}{w^3} - \frac{C}{u^3}\right)$$

Substituons maintenant ces formules dans les équations trouvées ci-dessus, qui expriment les dérangemens de ces élémens; & nous trouvons:

$$Px + Qy + Rz = -vv\left(\frac{A+B}{v^3} + \frac{C}{w^3}\right) + vu\,(\sin\eta\sin\sigma\sin\omega + \cos\eta\cos\sigma\cos(\zeta-\psi) + \cos\eta\sin\sigma\sin(\zeta-\psi)\cos\omega)\text{ par }\left(\frac{C}{w^3} + \frac{C}{u^3}\right)$$

ou bien $Px + Qy + Rz = -vv\left(\frac{A+B}{v^3} + \frac{C}{w^3}\right) + vu\cos\theta\left(\frac{C}{w^3} - \frac{C}{u^3}\right)$.

Ensuite, selon la Fig. 4.

$$R\sin VQ - P\cos IV - Q\cos KV = u\left(\frac{C}{w^3} - \frac{C}{u^3}\right)(\sin\eta\cos\sigma\sin\omega - \cos\eta\cos\sigma\cos(\zeta-\psi) + \cos\eta\cos\sigma\sin(\zeta-\psi)\cos\omega),$$

où je remarque que cette formule provient de la précédente, si l'on y met $\cos\sigma$ au lieu de $\sin\sigma$, & $-\sin\sigma$ au lieu de $\cos\sigma$, ou bien

le

le négatif de celle-ci réſulte de celle-là, ſi l'on y écrit $-(90^\circ - \sigma)$ au lieu de σ.

Enfin, la troiſieme formule devient

$$R \cot\omega + P \sin\psi - Q \cos\psi = u\left(\frac{C}{w^3} - \frac{C}{u^3}\right)\left(\frac{\sin\eta \cos\omega}{\sin\omega} - \cos\eta \sin(\zeta - \psi)\right).$$

Pour comprendre mieux la nature de ces expreſſions, nous n'avons qu'à tranſporter tout à la Trigonométrie ſphérique de la même maniere que ci-deſſus dans la Fig. 4.

Que le grand cercle INy repréſente donc le plan fixe, & B & C les lieux de ces deux corps, vus du corps A, qu'on doit concevoir dans le centre de la ſphere. Soit N le lieu du nœud, de ſorte que $IN = \psi$, l'angle $yNB = \omega$, & l'arc $NB = \sigma$; enſuite pour l'autre corps C, on a Fig.

la longitude $Iy = \zeta$, & la latitude $yC = \eta$

de ſorte que $Ny = \zeta - \psi$, & il eſt clair que l'arc BC eſt repréſenté par l'angle θ. Qu'on prenne maintenant $NV = 90^\circ - \sigma$, ou bien ſoit l'arc BNV un quart de cercle, & le coſinus de l'arc VC pris négativement ſera la même expreſſion qui ſe trouve dans la ſeconde formule: ou bien, prenant l'arc VQ auſſi égal à un quart de cercle, la dite formule eſt exprimée par ſin CQ de ſorte que

$$R \sin VQ = P \cos IV - Q \cos KV = u\left(\frac{C}{w^3} - \frac{C}{u^3}\right) \sin CQ.$$

Pour la troiſieme, qu'on continue les arcs NB & yC juſqu'à leur concurrence en S, & on aura

$$\text{tag } yS = \text{tag } \omega \sin(\zeta - \psi) \quad \& \quad \sin S = \frac{\cos\omega}{\cos yS}.$$

De C tirons ſur l'arc NB la perpendiculaire CR, & nous aurons:

$$\sin CR = \sin CS \cdot \sin S = \sin S (\sin yS \cos\eta - \cos yS \sin\eta)$$

donc $\sin CR = \cos\eta \cos\omega \operatorname{tang} yS - \sin\eta \cos\omega$, ou bien

$$\sin CR = \cos\eta \sin\omega \sin(\zeta - \psi) - \sin\eta \cos\omega.$$

Par conſéquent, la troiſieme formule ſe réduit à celle-ci:

$$R\cot\omega + P\sin\psi - Q\cos\psi = -u\left(\frac{C}{w^3} + \frac{C}{u^3}\right)\frac{\sin CR}{\sin\omega}.$$

Maintenant le mouvement du corps B eſt déterminé par les équations ſuivantes:

I. $\mathrm{d}\mathrm{d}v - v\mathrm{d}\Phi^2 = -\frac{\mathrm{d}t^2}{a}\left(\frac{A+B}{vv} + \frac{Cv}{w^3}\right) + \frac{u\,\mathrm{d}t^2\cos\theta}{a}\left(\frac{C}{w^3} - \frac{C}{u^3}\right)$

II. $2\mathrm{d}v\mathrm{d}\Phi + v\mathrm{d}\mathrm{d}\Phi = \frac{u\,\mathrm{d}t^2\sin CQ}{a}\left(\frac{C}{w^3} - \frac{C}{u^3}\right)$

III. $\mathrm{d}\psi = -\frac{u\,\mathrm{d}t^2\sin\sigma\sin CR}{a\,v\,\mathrm{d}\Phi\sin\omega}\left(\frac{C}{w^3} - \frac{C}{u^3}\right)$

IV. $\mathrm{d}\omega = -\frac{u\,\mathrm{d}t^2\cos\sigma\sin CR}{a\,v\,\mathrm{d}\Phi}\left(\frac{C}{w^3} - \frac{C}{u^3}\right)$

& enfin V. $\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}\Phi - \mathrm{d}\psi\cos\omega.$

Si la maſſe du corps C évanouiſſoit, le mouvement du corps B ſeroit régulier & ſe feroit dans le même plan. Mais les dérangemens ſeront peu conſidérables lorſque les expreſſions $\frac{Cv}{w^3}$ & $u\left(\frac{C}{w^3} + \frac{C}{u^3}\right)$ ſont très petites par rapport à celle-ci $\frac{A+B}{vv}$: c'eſt donc à ce cas principalement que j'appliquerai les recherches ſuivantes ſur les variations que ſubiſſent les élémens Aſtronomiques, dont on ſe ſert pour la détermination des orbites.

I. Ces recherches roulent principalement ſur les deux premieres équations, que je repréſente pour abréger de cette ſorte:

$$1°.\ ddv - vd\Phi^2 = \frac{Edt^2}{vv} + Rdt^2 \quad \& \quad 2°.\ 2dvd\Phi + vddd\Phi = Sdt^2,$$

de ſorte que

$$E = \frac{1}{\alpha}(A + B);\ R = \frac{u \cos\theta}{\alpha}\left(\frac{C}{w^3} - \frac{C}{u^3}\right) - \frac{Cv}{\alpha w^3}$$

$$\&\ S = \frac{u \sin CQ}{\alpha}\left(\frac{C}{w^3} - \frac{C}{u^3}\right)$$

où les dérangemens ſont cauſés par les quantités R & S, puiſque le mouvement ſeroit régulier ſi ces quantités évanouiſſoient.

II. Puiſque, dans le cas $S = o$, la ſeconde équation donneroit $vvd\Phi = \mathfrak{C}dt$, la quantité $\mathfrak{C}$ étant conſtante, je poſe $vvd\Phi = rdt$, & parce que $drdt = 2vdvd\Phi + vvddd\Phi$, il s'enſuit $dr = Svdt$, d'où l'on connoit la variabilité de cette quantité r; & en même tems on en tire le rapport entre les différentiels dt & $d\Phi$, d'où l'on pourra éliminer l'un ou l'autre du calcul.

III. Puiſque la diſtance v devient tantôt un *maximum*, tantôt un *minimum*, de ſorte que dans l'un & l'autre cas il ſoit $dv = o$, pour en tenir compte, j'introduis dans le calcul un certain angle λ, connu ſous le nom d'anomalie, duquel le différentiel dv dépende en ſorte qu'il évanouiſſe avec le ſinus de cet angle λ. Pour cet effet, poſant $v = \frac{p}{1 + q \cdot \cos\lambda}$, formule ſemblable à celle qu'on trouve pour le mouvement régulier, de ſorte que $\frac{1}{v} = \frac{1}{p} + \frac{q}{p}\cos\lambda$, je ſuppoſe d'abord $\frac{dv}{vv} = sd\Phi \sin\lambda$, afin qu'on obtienne $dv = o$, quand $\sin\lambda = o$.

IV. Sur cette formule $v = \frac{p}{1 + q\cos\lambda}$ j'obſerve, que la lettre p marque le demi-parametre de l'orbite, & q ſon excentricité, qui

ſont conſtantes dans le mouvement régulier, mais ici à cauſe des forces perturbatrices il les faut regarder comme variables. Enſuite, l'angle λ, qui exprime l'anomalie vraie, croîtroit également avec l'angle ϕ dans le mouvement régulier, mais ici leurs différentiels $d\phi$ & $d\lambda$ ſeront inégaux, & leur différence $d\phi - d\lambda$ donnera le mouvement de la ligne des abſides.

V. Ayant donc $\frac{1}{v} = \frac{1}{p} + \frac{q}{p} \cos\lambda$ & $\frac{dv}{vv} = s\,d\phi \sin\lambda$, nous en tirons l'égalité ſuivante:

$$\frac{dp}{pp} + \frac{q\,dp - p\,dq}{pp} \cos\lambda + \frac{q}{p} d\lambda \sin\lambda = s\,d\phi \sin\lambda,$$

qui, pour le mouvement régulier, où $d\phi = o$, $dq = o$ & $d\lambda = d\phi$, donneroit $s = \frac{q}{p}$; mais rien n'empêche que nous ne ſuppoſions auſſi ici $s = \frac{q}{p}$, à cauſe de pluſieurs nouvelles quantités variables que nous venons d'introduire dans le calcul. Poſant donc $s = \frac{q}{p}$, nous aurons:

$$d\lambda = d\phi - \frac{dp}{pq \sin\lambda} + \frac{p\,dq - q\,dp}{pq \sin\lambda} \cos\lambda.$$

VI. Enſuite, ayant déjà poſé $vv\,d\phi = r\,dt$, la formule $\frac{dv}{vv} = s\,d\phi \sin\lambda$ donne $dv = rs\,dt \sin\lambda$, d'où pour la premiere équation nous tirons $d\,dv = d.rs.\,dt \sin\lambda + rs\,dt\,d\lambda \cos\lambda$: cette valeur y étant ſubſtituée, en diviſant par dt, nous aurons:

$$d.rs.\sin\lambda + rs\,d\lambda \cos\lambda \; \frac{-v\,d\phi^2}{dt} = \frac{-E\,dt}{vv} + R\,dt.$$

Or, puiſque $dt = \frac{vv\,d\phi}{r}$, il en réſultera

d.rs

$$d.rs.\sin\lambda + rs\,d\lambda\cos\lambda - \frac{r\,d\Phi}{v} + \frac{E\,d\Phi}{r} - \frac{Rvv\,d\Phi}{r} = o$$

ou bien, à cauſe de $\frac{1}{v} = \frac{1}{p} + \frac{q}{p}\cos\lambda$,

$$d.rs.\sin\lambda + rs\,d\lambda\cos\lambda - \frac{r}{p}\,d\Phi - \frac{qr}{p}\,d\Phi\cos\lambda + \frac{E\,d\Phi}{r} - \frac{Rvv\,d\Phi}{r} = o.$$

VII. Quoique nous faſſions $s = \frac{q}{p}$, la multitude des lettres nous permet encore de ſuppoſer $\frac{r}{p} = \frac{E}{r}$, ou bien $r = \sqrt{Ep}$, pour faire évanouir les grands termes $-\frac{r}{p}\,d\Phi$ & $\frac{E\,d\Phi}{r}$. Donc, puiſque $s = \frac{p}{q}$, nous aurons:

$$d.rs.\sin\lambda + \frac{qr}{p}(d\lambda - d\Phi)\cos\lambda - \frac{Rvv\,d\Phi}{r} = o,$$ ou bien en conſervant plutôt la lettre s au lieu de q, puiſque

$$d\lambda - d\Phi = -\frac{dp}{pps\sin\lambda} + \frac{ds\cos\lambda}{s\sin\lambda},$$

$$r\,ds\sin\lambda + s\,dr\sin\lambda - \frac{r\,dp\cos\lambda}{pp\sin\lambda} + \frac{r\,ds\ c.\lambda^2}{\sin\lambda} - \frac{Rvv\,d\Phi}{r} = o,$$ ou

$$rr\,ds\sin\lambda^2 + sr\,dr\sin\lambda^2 - \frac{rr\,dp\cos\lambda}{pp} + rr\,ds\,c.\lambda^2 - Rvv\,d\Phi\sin\lambda = o.$$

VIII. Mais, puiſque $rr = Ep$, cette équation ſe changera en celle-ci:

$$Ep\,ds + \tfrac{1}{2}Es\,dp\sin\lambda^2 - \frac{E\,dp\cos\lambda}{p} - Rvv\,d\Phi\sin\lambda = o.$$

Or

Or, ayant tiré de la ſeconde équation: $dr = Svdt = \frac{Sv^3 d\Phi}{r}$, donc $\frac{1}{2}Edp = Sv^3 d\Phi$, le rapport des différentiels ds & $d\Phi$ ſera exprimé ainſi

$$Epds + Sv^3 sd\Phi \sin\lambda^2 - \frac{2Sv^3 d\Phi \cos\lambda}{p} - Rvvd\Phi \sin\lambda = o,$$

ou bien, en ſubſtituant $\frac{q}{p}$ au lieu de s

$$Edq - \frac{Sqv^3 d\Phi}{p}(2 - \sin\lambda^2) - \frac{2Sv^3 d\Phi \cos.\lambda}{p} - Rvvd\Phi \cos\lambda = o,$$

$$\text{ou } dq = \frac{Rvvd\Phi \sin\lambda}{E} + \frac{Sv^3 d\Phi}{Ep}(q + 2\cos\lambda + q\cos\lambda^2).$$

IX. Voilà maintenant tous nos différentiels réduits au ſeul différentiel $d\Phi$, dont le rapport à l'élément du tems dt eſt donné par la formule $vvd\Phi = dt\sqrt{Ep}$. Car, poſant $v = \frac{p}{1 + q\cos\lambda}$, nous aurons:

$$1^{\circ}.\ dp = \frac{2Sv^3 d\Phi}{E} = 2Svdt\sqrt{\frac{p}{E}}$$

$$2^{\circ}.\ dq = \frac{Rvvd\Phi \sin\lambda}{E} + \frac{Sv^3 d\Phi}{Ep}(q + 2\cos\lambda + q\cos\lambda^2)$$

$$\text{ou } dq = Rdt \sin\lambda . \sqrt{\frac{p}{E}} + \frac{Svdt(q + 2\cos\lambda + q\cos\lambda^2)}{\sqrt{Ep}}$$

$$3^{\circ}.\ d\lambda = d\Phi + \frac{Rvvd\Phi \cos\lambda}{Eq} - \frac{Sv^3 d\Phi \cos\lambda}{Epq}(2 + q\cos\lambda)$$

& de là on a $dv = \frac{qvvd\Phi}{p}\cos\lambda = \frac{q}{p}dt \sin\lambda . \sqrt{Ep}$.

X. En-

X. Enfin, pour les changemens du plan de l'orbite, à cauſe de $v\,d\Phi = \frac{dt\sqrt{Ep}}{v}$, nous aurons:

$$d\psi = \frac{-vu\,dt\,\sin\sigma\,\sin CR}{a\,\sin\omega\sqrt{Ep}}\left(\frac{C}{w^3} - \frac{C}{u^3}\right)$$

$$d\omega = \frac{-vu\,dt\,\cos\sigma\,\sin CR}{a\sqrt{Ep}}\left(\frac{C}{w^3} - \frac{C}{u^3}\right)$$

& $d\sigma = d\Phi - d\psi\,\cos\omega$.

XI. A l'aide de ces formules on pourra, pour chaque petit intervalle de tems, déterminer les variations cauſées 1°. dans le demi-parametre de l'orbite p, 2°. dans l'excentricité q, 3°. dans la poſition de la ligne des abſides, 4°. dans la poſition de la ligne des nœuds, 5°. dans l'inclinaiſon de l'orbite, c'eſt à dire, dans les élémens qui demeureroient conſtans dans le mouvement régulier. Enſuite, pour le mouvement même du corps, on a d'abord l'angle élémentaire $d\Phi$ avec le changement de la diſtance dv, & enſuite auſſi l'accroiſſement de l'argument de latitude σ. Tout revient donc à l'intégration de ces formules par des approximations convenables.

Remarques
ſur les formules précédentes.

I. Quand même l'intégration de ces formules réuſſiroit, ce qu'on ne ſauroit pourtant eſpérer que par des approximations, on voit que la détermination de tous les élémens renfermeroit les mêmes élémens, de ſorte qu'on n'en ſauroit tirer aucun avantage, à moins que ces élémens ne ſoient déjà à peu près connus: ce qui eſt la raiſon pour laquelle je ne regarde cette méthode applicable qu'aux cas où les dérangemens ſont extrêmement petits, ou bien où les corrections qu'on cherche, ſont fort petites. Cependant, dans ces cas mêmes, il ſera bon, après avoir corrigé ces élémens, de répéter les mêmes opérations ſur ces élémens corrigés, pour les trouver encore plus exactement.

II. Il faudroit ſans doute prendre cette précaution dans l'uſage des Tables de la Lune, dont les argumens ſuppoſent déjà pour la plûpart connue la diſtance de la Lune au Soleil, qu'on ne ſauroit pourtant ſavoir exactement avant que d'avoir déjà déterminé le lieu de la Lune. Je parle des Tables ordinaires de la Lune dont on ſe ſert aujourd'hui; & je ſuis fort en doute encore, s'il eſt convenable de changer leur forme en ſorte que les argumens de toutes les inégalités dépendent uniquement du mouvement moyen de la Lune.

III. Je dois encore remarquer, que les Tables de la Lune dont les Aſtronomes ſe ſervent, ne ſont pas conſtruites ſur les formules que je viens d'expoſer ici. La différence ſe trouve dans l'anomalie, que je prens ici en ſorte que la diſtance de la Lune à la Terre en réſulte exactement, ou la plus grande, ou la plus petite, lorſque le ſinus de l'anomalie évanouit; au lieu que dans les Tables l'anomalie tient toujours le même rapport au vrai mouvement de la Lune, ou bien on y ſuppoſe uniforme le mouvement des abſides, d'où vient que les plus grandes & les plus petites diſtances de la Lune ne répondent pas exactement aux points où le ſinus de l'anomalie évanouit. Or, ſuivant les formules données, le mouvement des abſides devient très irrégulier, & cela d'autant plus que l'excentricité eſt plus petite, d'où elles ne ſeroient point applicables à des cas où l'excentricité évanouiroit. Pour éviter cet inconvénient, on ne devroit plus mettre $s = \frac{q}{p}$, comme j'ai fait dans le développement des formules générales.

IV. Mais, quoi qu'il en ſoit, la premiere méthode me paroit toujours fort préférable, à moins que les dérangemens ne ſoient extrêmement petits, & il me paroit encore douteux s'il ne ſeroit pas même moins pénible de ſuivre cette méthode pour la détermination du mouvement de la Lune, & partant d'une époque où tant le lieu que le mouvement auroit été parfaitement connu, & de calculer, par exemple, de 6 heures en 6 heures, le lieu de la Lune ſuivant les formules,

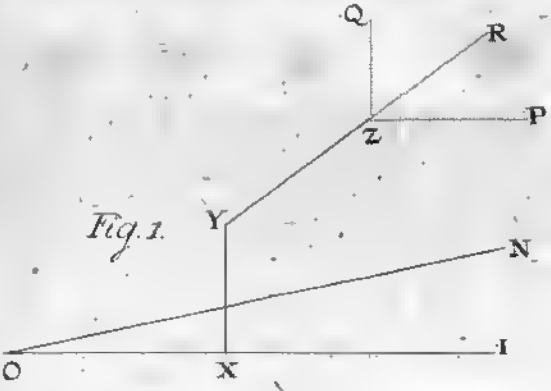

Fig. 1.

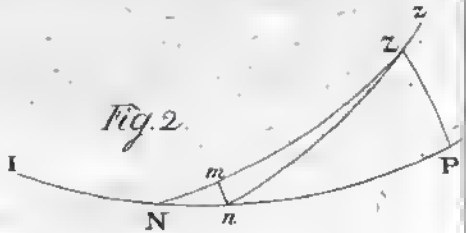

Fig. 2.

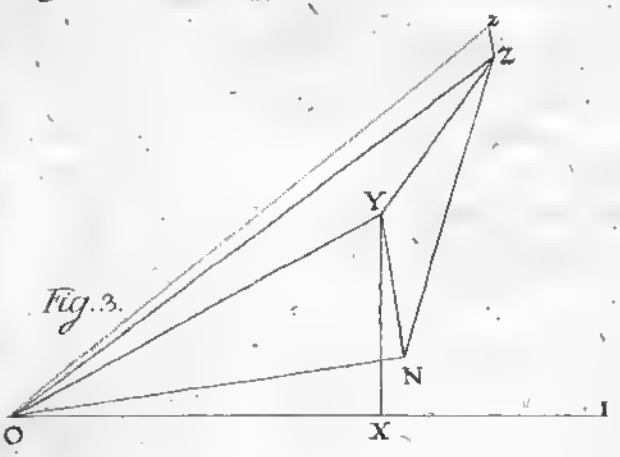

Fig. 3.

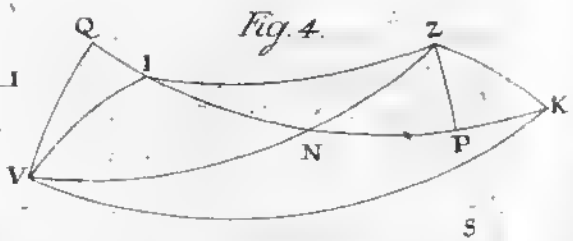

Fig. 4.

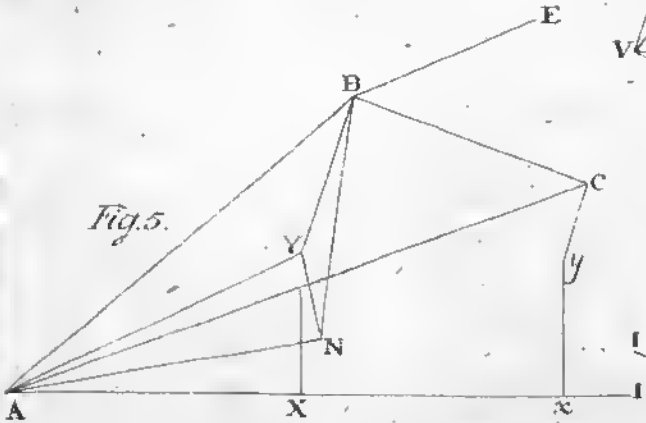

Fig. 5.

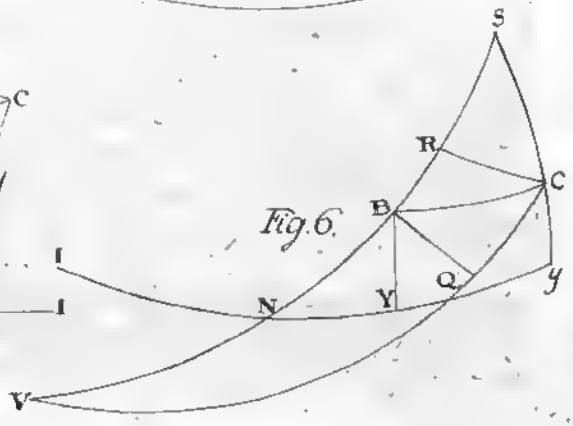

Fig. 6.

mules que j'ai expoſées ci-deſſus. Alors, au lieu des Tables Lunaires, on auroit des éphémérides continuelles, & tout le travail tomberoit uniquement ſur les premiers Calculateurs, dont l'ouvrage ne demanderoit peut-être pas plus de peine que quand on calcule par les Tables pour le midi & le minuit de chaque jour le lieu de la Lune: outre que, par cette nouvelle méthode, on pourroit arriver à un plus haut degré de préciſion, puiſqu'on ne ſeroit obligé de négliger aucune force qui agit ſur la Lune. C'eſt ce qui me fait eſpérer que ces nouvelles idées mériteront l'attention des Aſtronomes.